Zeitreihenanalyse: Trendprognosen

Constantin Scheel & Marcus Eckstein

Gliederung

a. Einführung
b. Lineare Trendfunktion
c. Gleitender Durchschnitt
d. Anwendungsgebiete + Vor & Nachteile
e. Strukturbruch und seine Auswirkungen
f. Fragen

Einführung & Zielstellung

Definition und Funktion

Trend = langfristige Entwicklungstendenz einer Zeitreihe

2 Hauptfunktionen:

A: Komplexitätsreduktion

B: Prognose

Lineare Trendfunktion

Lineare Trendfunktion

additives Komponentenmodell ohne Saisonkomponente

→ Komponenten wirken getrennt voneinander auf den Trend ein

Ausgangsformel:

$y_i = a + b \bullet t_i + u_i$ i= 1,...,...,...,n

a= Anfangspunkt der Funktion bzw. Schnittpunkt mit der y-Achse

b= Anstieg der Funktion

u= Restkomponente → hebt sich nach der Berechnung mit der Methode der kleinsten Quadrate immer auf

Schritt 1: Daten ermitteln

Weltweiter Absatz von Alben und Singles

Alben[1]	3.294	3.289	3.215	3.060	2.843	2.700	2.603	2.304	2.038	1.810	1.599
Singles[2]	459	440	370	318	265	233	354	582	931	1.202	1.494
gesamt	3.753	3.729	3.585	3.378	3.108	2.933	2.963	2.886	2.969	3.012	3.093
in Mio. Stück	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008

Schritt 2: Wertetabelle erstellen

Jahr	ti	yi	ti * yi	ti²
1998	1	3294	3294	1
1999	2	3289	6578	4
2000	3	3215	9645	9
2001	4	3060	12240	16
2002	5	2843	14215	25
2003	6	2700	16200	36
2004	7	2603	18221	49
2005	8	2304	18432	64
2006	9	2038	18342	81
2007	10	1810	18100	100
2008	11	1599	17589	121
∑	66	28755	152856	506

ti = Jahresindex
yi = deskriptiv erfasster Wert

n = Anzahl der Jahre = 11

$\bar{y} = \sum yi / n = 2614{,}1$

$\bar{t} = \sum ti / n = 6$

Schritt 3: Trendfunktion errechnen

Ausgangsfunktion lineare Trendfunktion:

$y_i = a + b \bullet t_i$ für i=1,2,...,n

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i y_i - n \bullet \bar{t} \bullet \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n \bullet \bar{t}^2}$$

Und

$$a = \bar{y} - b \bullet \bar{t}$$

Beispielrechnung

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i y_i - n \bullet \bar{t} \bullet \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n \bullet \bar{t}^2}$$

$$= \frac{152856 - 11 \cdot 6 \cdot 2614{,}1}{506 - 11 \cdot 6^2} = \frac{-19674{,}6}{110} = -178{,}86$$

a= $\bar{y}$ -b $\bar{t}$

a= 2614,1+ 178,86 •6= 3687,26

y= 3687,26- 178,86 •ti

Beispiel

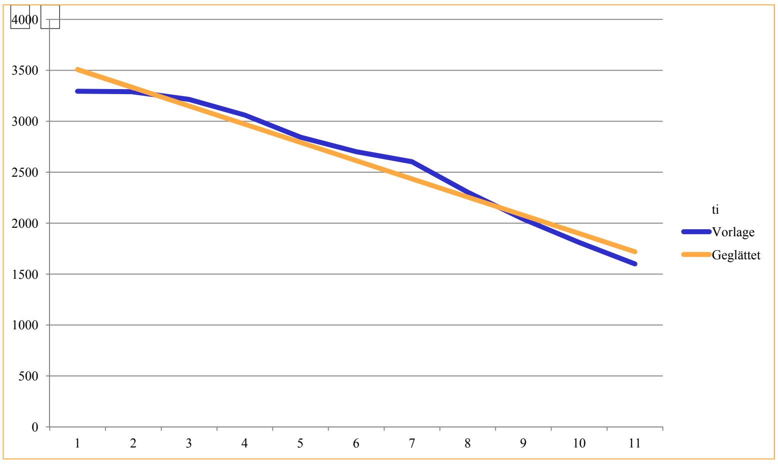
$$y = 3687,26 - 178,86 \bullet 1 = 3508,4$$
$$y = 3687,26 - 178,86 \bullet 4 = 2971,82$$

ti	y
1	3507,32
2	3329,54
3	3150,68
4	2971,82
5	2792,96
6	2614,1
7	2435,24
8	2256,38
9	2077,52

Wertetabelle für lineare Trendfunktion

ti	y
1	3507,32
2	3328,46
3	3149,6
4	2970,74
5	2791,88
6	2613,02
7	2434,16
8	2255,3
9	2076,44
10	1898,66
11	1719,8
12	1540,94
13	1362,08

Graph



Gleitender Durchschnitt

Funktion = Ausschläge im Kurvenverlauf zu glätten um Komplexität zu reduzieren

Gerade Ordnung: Eine gerade Anzahl von Werten wird in die Rechnung einbezogen
Ungerade Ordnung : Ungerade Anzahl von Werten wird in die Rechnung einbezogen

1. Je nach Ziel der Berechnung, Anzahl der in die Gleichung einbezogenen Werte festlegen → Je mehr Werte, desto Stärker wird die Kurve geglättet

2. Arithmetisches Mittel der ersten Wertereihe bilden

3. Um eine Zeile versetzt das nächste Arithmetische Mittel bilden

Formeln für gleitenden Durchschnitt

gerade Ordnung:

$$\overline{Y}_t = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \ldots + \frac{1}{2}y_n}{k}$$

ungerade Ordnung:

$$\overline{Y}_t = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{k}$$

Periode	Originaldaten
1	3294
2	3289
3	3215
4	3060
5	2843
6	2700
7	2603
8	2304
9	2038
10	1810
11	1599

Beispiel gleitender 3er Durchschnitt

$$y_2 = \frac{y_{t-k} + y_t + y_{t+k}}{k} = \frac{3294 + 3289 + 3215}{3} = 3266$$

$$y_6 = \frac{2843 + 2700 + 2603}{3} = 2715{,}33$$

$$y_8 = \frac{2603 + 2304 + 2038}{3} = 2315$$

Periode	Originaldaten	3er Durchschnitt
1	3294	--
2	3289	3266
3	3215	3188
4	3060	3039,3
5	2843	2867,7
6	2700	2715,3
7	2603	2535,7
8	2304	2315
9	2038	2050,7
10	1810	1815,7
11	1599	--

Beispiel

4er Durchschnitt:

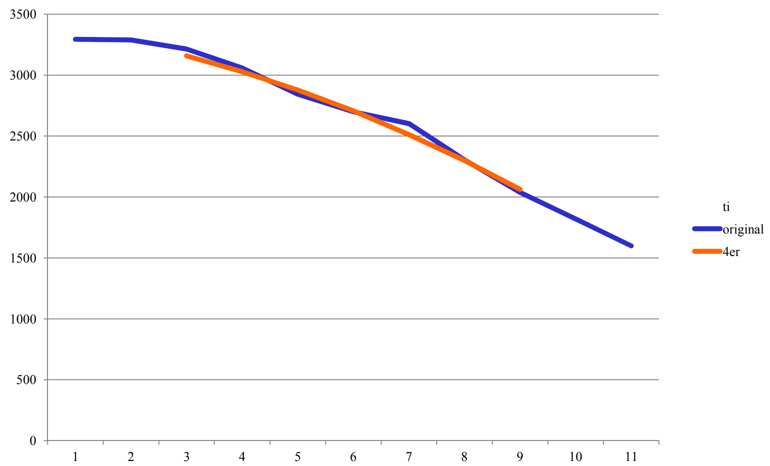
$$\bar{Y}_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{3294}{2} + 3289 + 3215 + 3060 + \frac{2843}{2}\right) = 3158{,}125$$

$$\bar{Y}_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{3289}{2} + 3215 + 3060 + 2843 + \frac{2700}{2}\right) = 3028{,}125$$

$$\bar{Y}_5 = \frac{1}{4}\left(\frac{3215}{2} + 3060 + 2843 + 2700 + \frac{2603}{2}\right) = 2878$$

Periode	Originaldaten	4er Durchschnitt
1	3294	--
2	3289	--
3	3215	3158,125
4	3060	3028,125
5	2843	2878
6	2700	2707
7	2603	2511,9
8	2304	2300
9	2038	2063,3
10	1810	--
11	1599	--

Beispiel: Original vs. 4er



Vor- und Nachteile

Linearer Trend

Vorteile:

- Bei Werten ohne größeren Schwankungen → relativ zuverlässiger Trend
- Deutliche Komplexitätsreduktion
- Gute Übersichtlichkeit
- Liefert einen “groben Überblick“

Nachteile:

- Bei unerwarteten Schwankungen müssen die Komponenten neu berechnet werden
→ geschieht dies nicht: unzuverlässige Prognosen
- Sehr starke Glättung der Kurve
- Saisonale Schwankungen werden nicht deutlich

Linearer Trend

Anwendung:

- Wie sinnvoll ist ein Markteintritt?
- Wie könnte die Unternehmensstrategie aussehen?
- Um langfristige Richtungen zu erkennen

Gleitender Durchschnitt

Vorteile:

- Kann auch über saisonale Schwankungen Auskunft geben
- Wie stark die geglättete Komponente herausgearbeitet wird, liegt im eigenen Ermessen
- Reaktion auf kurzfristige Schwankungen möglich

Nachteile:

- Aufwändigere Berechnung
- Es werden mehr Werte benötigt
- Kurven werden eventuell stark verkürzt

Gleitender Durchschnitt

Anwendung

•Um saisonale Optimierung zu erreichen
•Um detaillierteren Überblick zu gewinnen
•Strukturbrüche werden deutlich und in die Rechnung automatisch einbezogen

Strukturbruch

Definition

Ein Strukturbruch tritt dann auf, wenn Parameter innerhalb der Zeitreihe nicht konstant bleiben.

→ Unvorhergesehener Einbruch der Konjunktur durch beispielsweise Krise

Auswirkungen

Linearer Trend:

Im Falle eines Strukturbruchs müssen die Komponenten a und b neu berechnet werden. Erfolgt dies nicht, ist die Prognose fehlerhaft.

Gleitender Durchschnitt:

In folge dessen, dass die Werte fortlaufend in die Berechnung einbezogen werden, sind Strukturbrüche bereits berücksichtigt und werden anhand der Kurve verdeutlicht.

Quellen

Bourier, Günther (2010): Beschreibende Statistik. Wiesbaden. GWV Fachverlage GmbH. S. 155-194

Mosler, Karl/Schmidt, Friedrich (2005): Beschreibende Statistik und Wirtschaftsstatistik. Berlin u.a.: Springer. S. 197-214

Schulze, Peter (2007): Beschreibende Statistik. München: Oldenburg. Wissenschaftsverlag. S.241-274